Ergänzungsblatt zur Numerischen Integration

Praktische Einführung in die FE–Methode

Ausgabe 25.06.2009

1 Vorbemerkungen

Wie in der Vorlesung dargestellt, versuchen wir durch geschickte Wahl sowohl der n Stützstellen x_p zur Funktionsauswertung $f(x_p)$ als auch der Integrationsgewichte w_p ein Integral der Form

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{p=1}^{n} w_p\, f(x_p) \tag{1}$$

möglichst gut durch eine Summe anzunähern. Wir haben also zunächst $2n$ Unbekannte w_p und x_p.

Für eine Fehlerabschätzung betrachten wir, wie genau ein Polynom vom Grad m

$$f(x) = \mathcal{P}_m = \sum_{i=1}^{m} a_i\, x^i = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + ... \tag{2}$$

durch (1) integrierbar ist. Dabei hat das Polynom $m+1$ Koeffizienten.

2 Quadratur–Formeln vom Newton–Cotes–Typ

- Wir betrachten hier ausschließlich sog. „geschlossene“ Newton–Cotes–Formeln. Dies bedeutet, dass die beiden Integrationsgrenzen $a = -1$ und $b = +1$ gleichzeitig Stützstellen des Verfahrens sind.
- Innerhalb dieser Klasse von Verfahren wählen wir alle Stützstellen mit jeweils dem gleichen Abstand zueinander („äquidistant“).
- In der Vorlesung sind für dieses Verfahren für $n = 2, 3, 5$ die Stützstellen und zugehörigen Gewichte angegeben worden.

2.1 Beispielhafte Berechnung der Gewichte w_p für $n = 3$ („Simpson–Regel“)

Wir wählen drei Stützstellen $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = +1$ und suchen die drei Gewichte w_1, w_2, w_3 durch Vergleich mit einem Polynom vom Grad $m = 2$, das ebenfalls drei Koeffizienten a_0, a_1, a_2 besitzt. Aus (1) und (2) ergibt sich also

$$I = \int_{-1}^{+1} a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 \mathrm{d}x = [...]_{-1}^{+1} = 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 \tag{3}$$

und an den Stützstellen

$$\begin{aligned} f(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 && (4)\\ f(0) &= a_0 && (5)\\ f(+1) &= a_0 + a_1 + a_2\,. && (6) \end{aligned}$$

D.h. (1) bzw. (3) stellt sich als

$$\begin{aligned} I_{Simpson} &= w_1(a_0 - a_1 + a_2) + w_2\, a_0 + w_3(a_0 + a_1 + a_2) \\ &= a_0(w_1 + w_2 + w_3) + a_1(w_3 - w_1) + a_2(w_1 + w_3) \end{aligned} \tag{7}$$

dar.
Nun kann man die Koeffizienten von $(3)_3$ und (7) vergleichen und erhält direkt $w_1 = w_3 = \frac{1}{3}$ und $w_2 = \frac{4}{3}$ als gesuchte Gewichte für die Simpson–Regel. Dieses Ergebnis erhält man übrigens auch, wenn man den Fehler $err = I_{Simpson} - I$ minimiert.

2.2 Versuch einer Fehlerabschätzung

Wir können eine beliebige Funktion $f(x)$ oder ein Polynom der Form (2) in eine Taylor–Reihe (um $x_0 = 0$) entwickeln, so dass man

$$f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + ... \tag{8}$$

$$\quad = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)\, x^3 + ... \tag{9}$$

mit den Ableitungen $f', f'', f''', ...$ von $f(x)$ an $x_0 = 0$ erhält.
Aus (1) ergibt sich also

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{d}x \simeq ... = \left[f(0)\, x + \frac{1}{2} f'(0)\, x^2 + \frac{1}{6} f''(0)\, x^3 + \frac{1}{24} f'''(0)\, x^4 + ... \right]_{-1}^{+1} = ... = \tag{10}$$

$$\quad = f'(0) + \frac{1}{2} f'''(0) + ... \tag{11}$$

Schlussfolgerung: Bei Polynomen vom Grad $m \geq 3$ bleibt ein Fehlerterm übrig, denn bei Polynomen bis Grad $m = 2$ ist $f''' \equiv 0$. Polynome bis $m = 2$ werden also durch die Simpson–Regel (=Newton–Cotes–Integration vom Grad $n = 3$) *exakt* integriert.

$\rightsquigarrow$ Für die Newton–Cotes–Integration wird in der Literatur eine Exaktheit bis zum Polynomgrad $q = n - 1 = m$ angegeben.

3 Gauss–Integration

In diesem Abschnitt zeigen wir für die Gauss–Integration mit $n = 2$ wie man für ein Polynom $\mathcal{P}_3$ vom Grad $m = 3$ (also mit 4 freien Koeffizienten $a_0, ..., a_3$) sowohl die beiden Stützstellen x_1, x_2 als auch die beiden Gewichte w_1, w_2 berechnet, so dass $\mathcal{P}_3$ *exakt* integriert wird.
Ähnlich wie in (3) aus Abschn. 2.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}_3\, \mathrm{d}x &= [...]_{-1}^{+1} = 2a_0 + \frac{2}{3} a_2 \\ &\overset{!}{=} w_1(a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, x_1^2 + a_3\, x_1^3) + w_2(a_0 + a_1\, x_2 + a_2\, x_2^2 + a_3\, x_2^3)\,, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei wir hier gleich die Summendarstellung (1) für diese Gauss–Integration mit $n = 2$ eingesetzt haben. Wiederum ein *Koeffizientenvergleich* in (12) liefert 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten x_1, x_2, w_1, w_2.
Das Auflösen dieses Gleichungssystems liefert die bekannte Lösung für die Gauss–Integration mit $n = 2$: $w_1 = w_2 = 1$ und $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Übung !

$\rightsquigarrow$ Die Gauss–Integration ist bis zum Polynomgrad $q = 2m - 1$ exakt.