Stand 15. Juli 2003

Dynamik:

Gleichgewicht:	$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \varphi \ddot{\boldsymbol{x}}$	(Volumenkräfte weggelassen)
Verschiebungsrandbed.:	$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}$ auf $\partial\mathcal{B}_u$	
Spannungsrandbed.:	$\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$ auf $\partial\mathcal{B}_\sigma$	

$$\partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_\sigma = \partial\mathcal{B}$$

mit: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{x}} = \ddot{\boldsymbol{u}}$

Näherungslösung durch Multiplikation mit Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ und Integration über $\mathcal{B}$:

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\ \mathrm{dV} - \rho \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}\ \mathrm{dV} = 0 \tag{1}$$

partielle Integration, Gauss'scher Satz:

$$\Rightarrow \quad -\int\limits_{\mathcal{B}} \nabla\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\ \mathrm{dV} + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{p}\ \mathrm{dA} - \rho \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}\ \mathrm{dV} = 0 \tag{2}$$

Diskretisierte Form:

mit:

$$\mathbf{u_e} = \sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{u_e^I}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_\mathbf{e} = \sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{I}}$$

$$\boldsymbol{\eta_e} = \sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} N^I(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\eta_e^I}$$

$$\boldsymbol{\nabla\eta_e} = \sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} \boldsymbol{\eta_e^I} \otimes \frac{\partial N^I(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{x}} = \sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} \boldsymbol{B^I} \boldsymbol{\eta_e^I}$$

$$\boldsymbol{\nabla u_e} = \sum_{I=1}^{\mathrm{nel}} \boldsymbol{B^I} \boldsymbol{u_e^I}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{G}(\boldsymbol{u}, \delta \boldsymbol{u}) =$$

$$\bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \sum_{I=1}^{\text{nel}} \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}} \Big[\underbrace{\int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{I}^T} \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{R(u)}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\text{nel}} N^I \rho N^k \boldsymbol{I}\ \ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{k}}\ \mathrm{dV}}_{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_e} N^I \boldsymbol{p}\, \mathrm{dA}}_{\boldsymbol{P}} \Big] \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}\ +\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{P}$$

Die Dämpfung wird geschwindigkeitsproportional mit Hilfe einer konstanten Dämpfungsmatrix $\boldsymbol{C}$ (Rayleigh-Dämpfung) beschrieben:

$$\boldsymbol{C} := d_1\boldsymbol{M} + d_2\boldsymbol{K} \tag{4}$$

C stellt sich somit als Kombination aus der Massen- und der Steifigkeitsmatrix dar.

$$\Rightarrow \boldsymbol{M}\underbrace{\ddot{\boldsymbol{u}}}_{=\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}\underbrace{\dot{\boldsymbol{u}}}_{=\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{P} \tag{5}$$

Mit den zu den Randbedingungen zusätzlich notwendigen Anfangsbedingungen $\boldsymbol{u_0}$ und $\boldsymbol{v_0}$.

Mit Hilfe von (5) lassen sich auch die Anfangsbeschleunigungen

$$a_0 = \boldsymbol{M}^{-1}[\boldsymbol{P} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{v_0} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u_0})] \tag{6}$$

angeben, die für die algorithmische Formulierung benötigt werden:

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{a_{n+1}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{v_{n+1}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u_{n+1}}) = \boldsymbol{P_{n+1}} \tag{7}$$

Implizite Lösung der Bewegungsgleichung (5) mit Hilfe des Newmark-Verfahrens:

Approximation von $\boldsymbol{u_{n+1}}$ und $\boldsymbol{v_{n+1}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_{n+1}} = &\quad \boldsymbol{u_n} + \Delta t \boldsymbol{v_n} + \tfrac{(\Delta t)^2}{2}[(1-2\beta)\boldsymbol{a_n} + 2\beta \boldsymbol{a_{n+1}}] \\ \boldsymbol{v_{n+1}} = &\quad \boldsymbol{v_n} + \Delta t[(1-\gamma)\boldsymbol{a_n} + \gamma \boldsymbol{a_{n+1}}] \end{aligned} \tag{8}$$

mit den Newmark-Parametern β und γ.

$$\Rightarrow \quad (\boldsymbol{M} + \gamma\Delta t\boldsymbol{C})\boldsymbol{a_{n+1}} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a_{n+1}}, \boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{a_n}) = \boldsymbol{P_{n+1}} - G(\boldsymbol{u_n}, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{a_n}) \tag{9}$$

(Beschleunigungsform)

Umformen von (8) liefert:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_{n+1}} &= \alpha_1(\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}) - \alpha_2 \boldsymbol{v_n} - \alpha_3 \boldsymbol{a_n} \\ \boldsymbol{v_{n+1}} &= \alpha_4(\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}) + \alpha_5 \boldsymbol{v_n} + \alpha_6 \boldsymbol{a_n} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\text{mit:} \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{1}{\beta(\Delta t)^2}, & \alpha_2 &= \tfrac{1}{\beta \Delta t}, & \alpha_3 &= \tfrac{1-2\beta}{2\beta}, \\ \alpha_4 &= \tfrac{\gamma}{\beta \Delta t}, & \alpha_5 &= (1 - \tfrac{\gamma}{\beta}), & \alpha_6 &= (1 - \tfrac{\gamma}{2\beta})\Delta t. \end{aligned} \tag{11}$$

Einsetzen von (10) in (7) ergibt eine nichtlineare Gleichung in der Unbekannten $\boldsymbol{u_{n+1}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G(u_{n+1})} = \boldsymbol{M}&[\alpha_1(\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}) - \alpha_2 \boldsymbol{v_n} - \alpha_3 \boldsymbol{a_n}] \\ &+ \boldsymbol{C}[\alpha_4(\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}) + \alpha_5 \boldsymbol{v_n} + \alpha_6 \boldsymbol{a_n}] \\ &+ \boldsymbol{R(u_{n+1})} - \boldsymbol{P_{n+1}} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{12}$$

Linearisierung von (12) zum Lösen mittels Newton-Iteration:

$$\begin{aligned} [\alpha_1 \boldsymbol{M} + \alpha_4 \boldsymbol{C} + \boldsymbol{K_T(u^i_{n+1})}]\Delta \boldsymbol{u_{n+1}} &= -\boldsymbol{G(u^i_{n+1})} \\ \boldsymbol{u^{i+1}_{n+1}} &= \boldsymbol{u^i_{n+1}} + \Delta \boldsymbol{u_{n+1}} \end{aligned}$$

mit der Tangente:

$$\boldsymbol{K_T(u^i_{n+1})} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{u_{n+1}}}\right|_{\boldsymbol{u^i_{n+1}}} \tag{13}$$

Anmerkungen:

- Das beschriebene Vorgehen ist hauptsächlich aus Hughes und Wriggers entnommen
- Folgende Newmark-Parameter liefern einen unbedingt stabilen Algorithmus:
  $\beta = 0.25$
  $\gamma = 0.54$
- Bei manchen Elementen oder zur Verbesserung der Geschwindigkeit wird die Massenmatrix diagonalisiert, indem zeilenweise aufsummiert und die Summe auf die Diagonale geschrieben wird (Lumped Masses) (z.B. elem106.m).