FEM – Ortsdiskretisierung

Beispiel: Lineare Elastizität, EVZ und Vierknotenelement

Spannungstensor:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \tag{1}$$

E–Tensor:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{ijkl} \tag{2}$$

Verzerrungstensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i\tilde{j}} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{i,j} = \mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4}$$

Testfunktion: $\boldsymbol{\eta} \to \delta \boldsymbol{u}$
mit den Symmetrieeigenschaften von $\mathbb{C}$ ergibt sich

$$G(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\delta u_{i,j}\mathbb{C}_{ijkl}u_{k,l}}_{\Delta G \cdot \Delta \boldsymbol{u}} \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\delta u_{i,j}\hat{\sigma}_{i,j}}_{G(\hat{\boldsymbol{u}},\delta\boldsymbol{u})} \mathrm{d}V + P = 0 \tag{5}$$

Der geometrische Anteil ist 0, da die Variation der Ableitung der Testfunktion ($\Delta\delta u_{i,j}$) 0 ergeben muss, da die Gleichung für beliebige Testfunktionen erfüllt sein muss.

<u>Ortsdiskretisierung:</u>

$$\int_{B_0} (...)\mathrm{d}V = \bigcup^{\text{numel}} \int_{\Omega_e} (...)\mathrm{d}V \tag{6}$$

<u>Elementgrößen:</u>

$$\boldsymbol{u}^e = \begin{bmatrix} u_x^1 \\ u_y^1 \\ u_x^2 \\ : \\ : \\ u_x^n \\ u_y^n \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B}^e = \begin{bmatrix} N_{,x}^1 & 0 & & N_{,x}^n & 0 \\ 0 & N_{,y}^1 & \cdots & 0 & N_{,y}^1 \\ N_{,y}^1 & N^1, x & & N_{,y}^n & N_{,x}^n \end{bmatrix} \tag{8}$$

[n] = Anzahl der Elementknoten

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{a=1}^{\text{nel}} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}_e\boldsymbol{u}_e \tag{9}$$

$$\Rightarrow \delta u_{i,j}\mathbb{C}_{ijkl}u_{k,l} = \delta\boldsymbol{u}_e^T \underbrace{\boldsymbol{B}_e^T\mathbb{C}\boldsymbol{B}_e}_{\boldsymbol{k}_{\text{elem}}} \Delta\nabla\boldsymbol{u}_e \tag{10}$$

$$\delta u_{i,j} \cdot \hat{\sigma}_{i,j} = \delta\boldsymbol{u}_e^T\boldsymbol{B}_e^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{11}$$

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ berechnet sich mit Verschiebung aus letztem Lastschritt.

Darstellung der Elementgrößen durch Verwendung diskreter Punkte (Elementknoten) im Element und Interpolation mit Hilfe von Element-Ansatzfunktionen und deren Ableitungen:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{a=1}^{\text{nel}} N_a(\boldsymbol{\delta},t)\boldsymbol{u}_a(t) = \begin{bmatrix} N_1 \\ : \\ N_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} u_x^1 & u_y^1 \\ : & : \\ u_x^n & u_y^n \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{a=1}^{\text{nodes}} \boldsymbol{u}_a(t) \otimes \nabla(N_a) \tag{13}$$

analog für $\Delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}$

<u>Einführung von Vektor-Matrix-Notation(Voigt-Notation):</u>

$$\varepsilon_{i,j} \rightarrow \; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{,x} & 0 \\ 0 & N_{,y} \\ N_{,y} & N_{,x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \tag{14}$$

analog für $\delta\varepsilon_{i,j}$

$$\mathbb{C}_{ijkl} \rightarrow \; \mathbb{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ ebener Verzerrungszustand} \tag{15}$$

$$\sigma_{ij} \rightarrow \; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \quad \delta\varepsilon \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \\ \sigma \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_x & \delta u_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G^{\text{elem}}(\boldsymbol{u}^e, \delta\boldsymbol{u}^e) = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_x^1 & \cdots & \delta u_y^n \end{bmatrix}}_{\text{1 x nel*ndf}} \int_{B_{\text{elem}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}^{e^T} \\ \\ \end{bmatrix}}_{\text{ndf*nel x 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{C} \end{bmatrix}}_{\text{3 x 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}^e \quad \end{bmatrix}}_{\text{3 x nel*ndf}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_x^1 \\ : \\ : \\ u_y^n \end{bmatrix}}_{\text{ndf*nel x 1}} \mathrm{d}V \\ + \begin{bmatrix} \delta u_x^1 & \cdots & \delta u_y^n \end{bmatrix} \int_{B_{\text{elem}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}^{e^T} \\ \\ \end{bmatrix}}_{\text{ndf*nel x 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{1,2} \end{bmatrix}}_{\text{3 x 1}} \mathrm{d}V = 0 \end{aligned} \tag{18}$$