FEM – Schwache Form des Gleichgewichts

Gleichgewicht:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \tag{1}$$

Verschiebungsrandbed.:

$$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_u \tag{2}$$

Spannungsrandbed.:

$$\boldsymbol{\sigma n} = \boldsymbol{p} \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_\sigma \tag{3}$$

$$\partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_\sigma = \partial\mathcal{B} \tag{4}$$

Näherungslösung durch Multiplikation mit Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$
und Integration über $\mathcal{B}$: ($\boldsymbol{\eta}$=$\mathbf{0}$ auf $\partial\mathcal{B}_u$)

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\limits_{\mathcal{B}} \sigma_{ij,j}\eta_i\,\mathrm{d}V = 0 \tag{6}$$

partielle Integration, GAUSS'scher Satz
$\Rightarrow$

$$\int\limits_{\mathcal{B}_i} \eta_{i,j}\sigma_{ij}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\mathcal{B}} \eta_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}A = 0 \tag{7}$$

mit :

$$\int\limits_{\partial\mathcal{B}} \eta_i\sigma_{ij}n_j\,\mathrm{d}A = \int\limits_{\partial\mathcal{B}_u} \underbrace{\eta_i\sigma_{ij}}_{=0\mathrm{auf}\partial\mathcal{B}_u} n_j\,\mathrm{d}A + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_p} \eta_i \underbrace{\sigma_{ij}n_j}_{p_i}\,\mathrm{d}A \tag{8}$$

Somit lautet die Schwache Form des Gleichgewichts:

$$\int\limits_{\mathcal{B}} n_{i,j}\sigma_{ij}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \eta_i p_i\,\mathrm{d}A = 0 \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \nabla\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int\limits_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}A = 0 \tag{10}$$

Da die schwache Form im Allgemeinen eine nichtlineare Gleichung ist, erfolgt die Lösung iterativ mit Hilfe des NEWTON–Verfahrens für die unbekannten Knotenverschiebungen $\Delta\boldsymbol{u}$.

$$G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\eta}) = \int\limits_{\mathcal{B}} \nabla\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V - \underbrace{\int\limits_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{p}\,dA}_{=P \text{ Oberflächenlasten}} \tag{11}$$

NEWTON–Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle mit der bekannten Verschiebung $\hat{\boldsymbol{u}}$ als Startlösung:

$$G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}) = G(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta}) + \mathcal{D}G(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta})\Delta\boldsymbol{u} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0 \tag{12}$$

und der Linearisierung von G$(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u})$ als GATEAUX–Ableitung:

$$\mathcal{D}G(\tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \Delta\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} G(\tilde{\boldsymbol{u}} + \epsilon\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta})\Big|_{\epsilon=0} \tag{13}$$

Nach $\boldsymbol{\eta}$ wird nicht abgelitten, da das Testfeld $\boldsymbol{\eta}$ beliebig aber fest gewählt werden kann, und somit keine Systemgröße darstellt, die variiert wird.

$$\underline{\underline{\Delta G(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\Delta u} = \int\limits_{\mathcal{B}} \underbrace{\Delta\nabla\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{\text{geometr. Anteil}} + \underbrace{\nabla\boldsymbol{\eta} \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma}}_{\text{materieller Anteil}} \, \mathrm{d}V}} \tag{14}$$

$\Rightarrow$ iterative Lösung:

$$\mathcal{D}G(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta})\Delta\boldsymbol{u} = -G(\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\eta}) \tag{15}$$

$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{u}$
$\Rightarrow \boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}$